2°/ a) $h(t) = \sin^2 t \Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x t\sin^2 t\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$

on a : $\forall t \in \mathbf{R} : \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$

donc $\displaystyle\int_0^x t\sin^2 t\,dt = \int_0^x (\frac{t}{2} - \frac{t\cos 2t}{2})dt = \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x t\cos 2t\,dt$

$* \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$

*Intégrons par parties : $\displaystyle\int_0^x t\cos 2t\,dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = \cos 2t \\ v(t) = t \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ d'où

$\displaystyle\int_0^x t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\left[t\sin 2t\right]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \sin 2t\,dt = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\left[\cos 2t\right]_0^x$

$= \dfrac{1}{2}x\sin(2x) + \dfrac{1}{4}\cos 2x - \dfrac{1}{4}$

on obtient alors : $\displaystyle\int_0^x t\sin^2 t\,dt = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x\sin(2x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{1}{8}$

donc $\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\sin(2x) - \dfrac{1}{4x}\cos(2x) + \dfrac{1}{4x} & \text{si } x \neq 0 \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$

b) On a : $h(0) = 0$ donc d'après **C** - 1°/ b) ψ est continue en 0 d'où

$\lim\limits_{x\to 0}\psi(x) = 0$. Il en résulte que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x} = 0$